Juegos, Indistinguibilidad y Comónadas

Gabriel Goren [1, 2]

ggoren@dc.uba.ar

[1] Universidad de Buenos Aires. FCEN. Departamento de Matemática. Buenos Aires, Argentina
[2] CONICET-Universidad de Buenos Aires. Instituto de Ciencias de la Computación (ICC). Buenos Aires, Argentina.

Resumen

La Teoría de Modelos Finitos estudia las estructuras relacionales finitas (tales como grafos, o más en general bases de datos relacionales) desde el punto de vista de los lenguajes formales que las describen. En particular podemos preguntarnos qué tan fuerte debe ser un lenguaje lógico para poder expresar una cierta propiedad de estas estructuras, o para poder expresar qué diferencia a una de estas estructuras de otra. En esta comunicación se busca brindar una introducción al tópico desde el punto de vista de la semántica comonádica introducida por Abramsky, Dawar y Wang y desarrollada por Abramsky y Shah [1] [2]. Esta constituye un abordaje a la Teoría de Modelos Finitos desde una perspectiva de Teoría de Categorías.

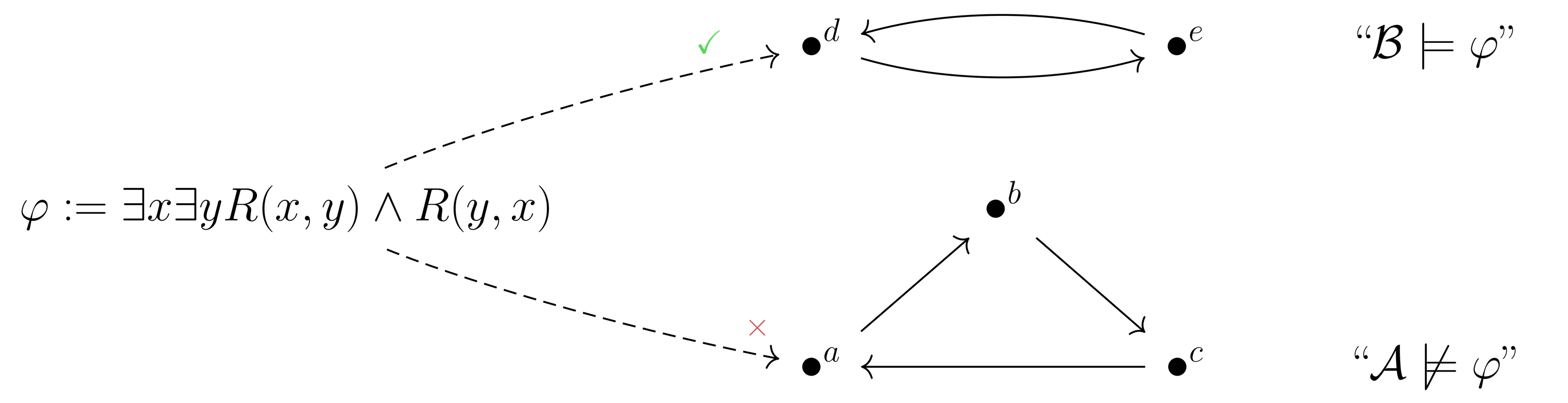
Lógica de Primer Orden

En Lógica de Primer Orden (LPO), podemos escribir fórmulas según la gramática

$$\varphi ::= \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \neg\varphi \mid \exists x.\varphi \mid \forall x.\varphi \mid R(x_1, \dots x_n)$$

donde R varía sobre una ***signatura relacional*** σ (cada símbolo $R \in \sigma$ tiene asociada una ***aridad*** $n \in \mathbb{N}$) y $x, x_1, \dots x_n$ varían sobre un conjunto de variables VAR.

Para darle semántica formal a una ***sentencia*** φ (fórmula sin variables libres), la interpretamos como una afirmación sobre una ***estructura relacional*** $\mathcal{A}$, que consiste en un conjunto de puntos A y una relación n-aria $R^{\mathcal{A}} \in A^n$ para cada símbolo n-ario $R \in \sigma$.

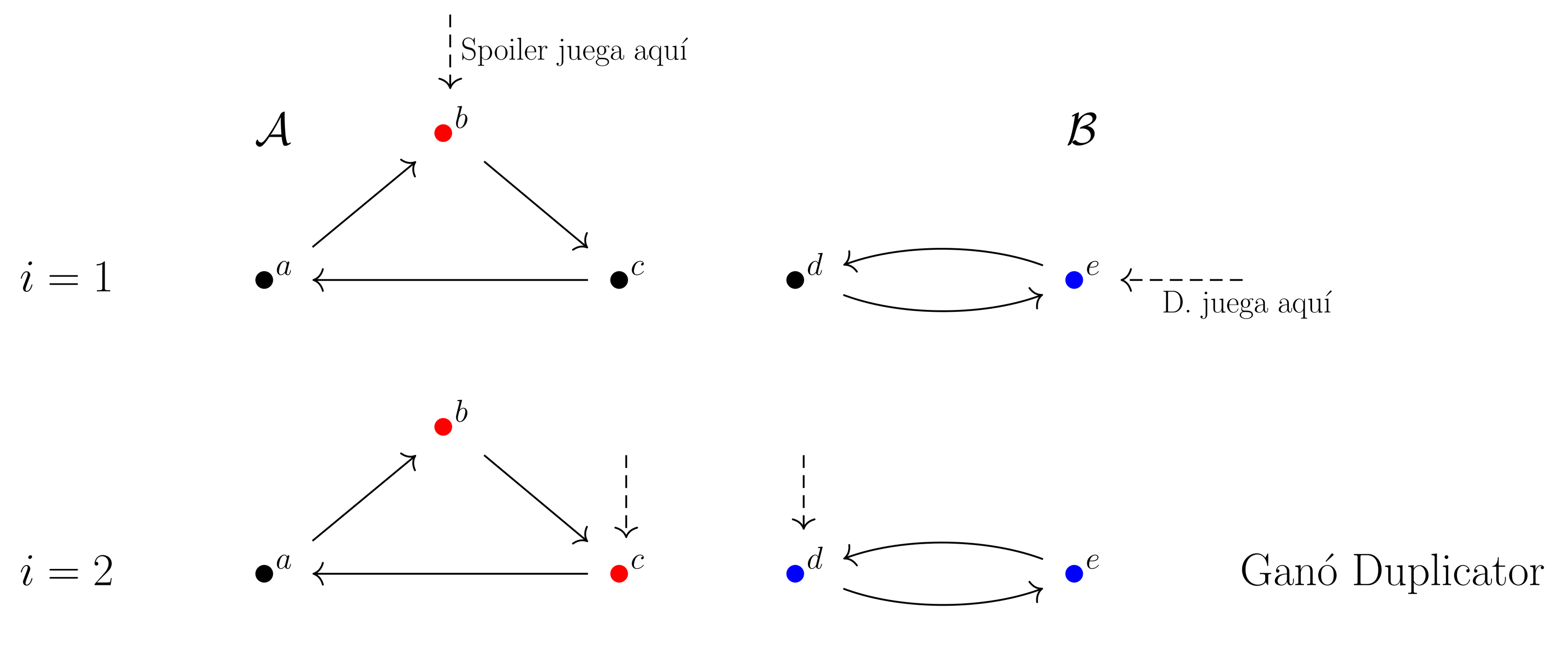


Juego de Ehrenfeucht-Fraïssé

El *juego EF asimétrico a k pasos*, $\mathcal{G}_k^{\rightarrow}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, caracteriza la indistinguibilidad lógica respecto al fragmento de primer orden $\mathrm{LPO}_k^{\exists}$ de fórmulas ***positivas*** (sin $\neg, \forall$) con a lo sumo k cuantificadores anidados (***quantifier rank*** acotado por k).

En este juego entre dos jugadores, *Spoiler* intenta mostrar que las estructuras son diferentes seleccionando puntos de $\mathcal{A}$ sucesivamente, mientras que *Duplicator* intenta mostrar que son iguales, respondiendo en $\mathcal{B}$ de forma tal que sus respuestas mantengan una relación de homomorfismo parcial con las jugadas de Spoiler.

Dos estructuras $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son indistinguibles para $\mathrm{LPO}_k^{\exists}$ si Duplicator tiene estrategia ganadora en $\mathcal{G}_k^{\rightarrow}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y también en $\mathcal{G}_k^{\rightarrow}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.



- Duplicator tiene estrategia ganadora para $\mathcal{G}_2^{\rightarrow}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$, por lo tanto toda fórmula de $\mathrm{LPO}_2^{\exists}$ satisfecha por $\mathcal{A}$ será satisfecha por $\mathcal{B}$.
- No tiene estrategia ganadora para $\mathcal{G}_2^{\rightarrow}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ (ver fórmula más arriba) ni para $\mathcal{G}_3^{\rightarrow}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
- Más fuertemente todavía, no existe un homomorfismo (total) $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

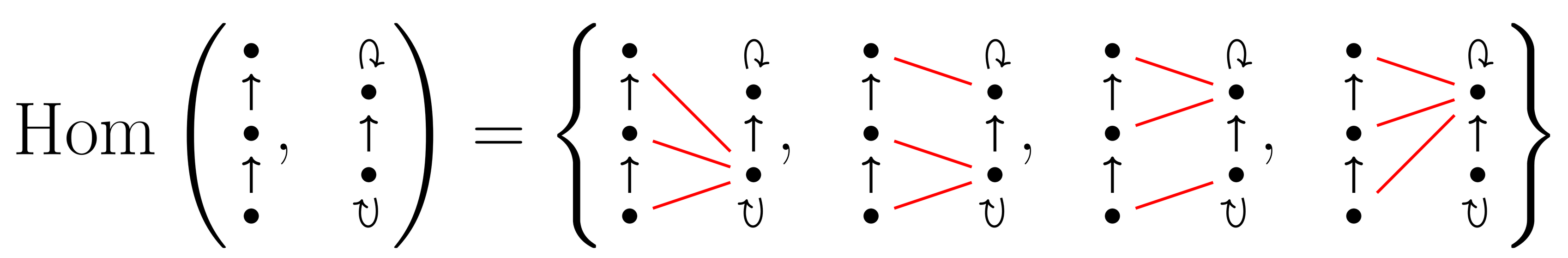
Referencias

[1] Samson Abramsky, Anuj Dawar, and Pengming Wang. The pebbling comonad in finite model theory. In *2017 32nd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–12. IEEE, 2017.

[2] Samson Abramsky and Nihil Shah. Relating structure and power: Comonadic semantics for computational resources. *Journal of Logic and Computation*, 31(6):1390–1428, 2021.

Homomorfismos

Las estructuras relacionales (con σ fijo) forman una ***categoría*** $\mathsf{Struct}(\sigma)$ en la cual las flechas o transformaciones de estructuras (formas de ir de una a la otra) son los ***homomorfismos*** o funciones que preservan relaciones: funciones $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tales que $R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots a_n) \implies R^{\mathcal{B}}(f(a_1), \dots f(a_n))$ para toda $R \in \sigma$ n-aria.



Indistinguibilidad

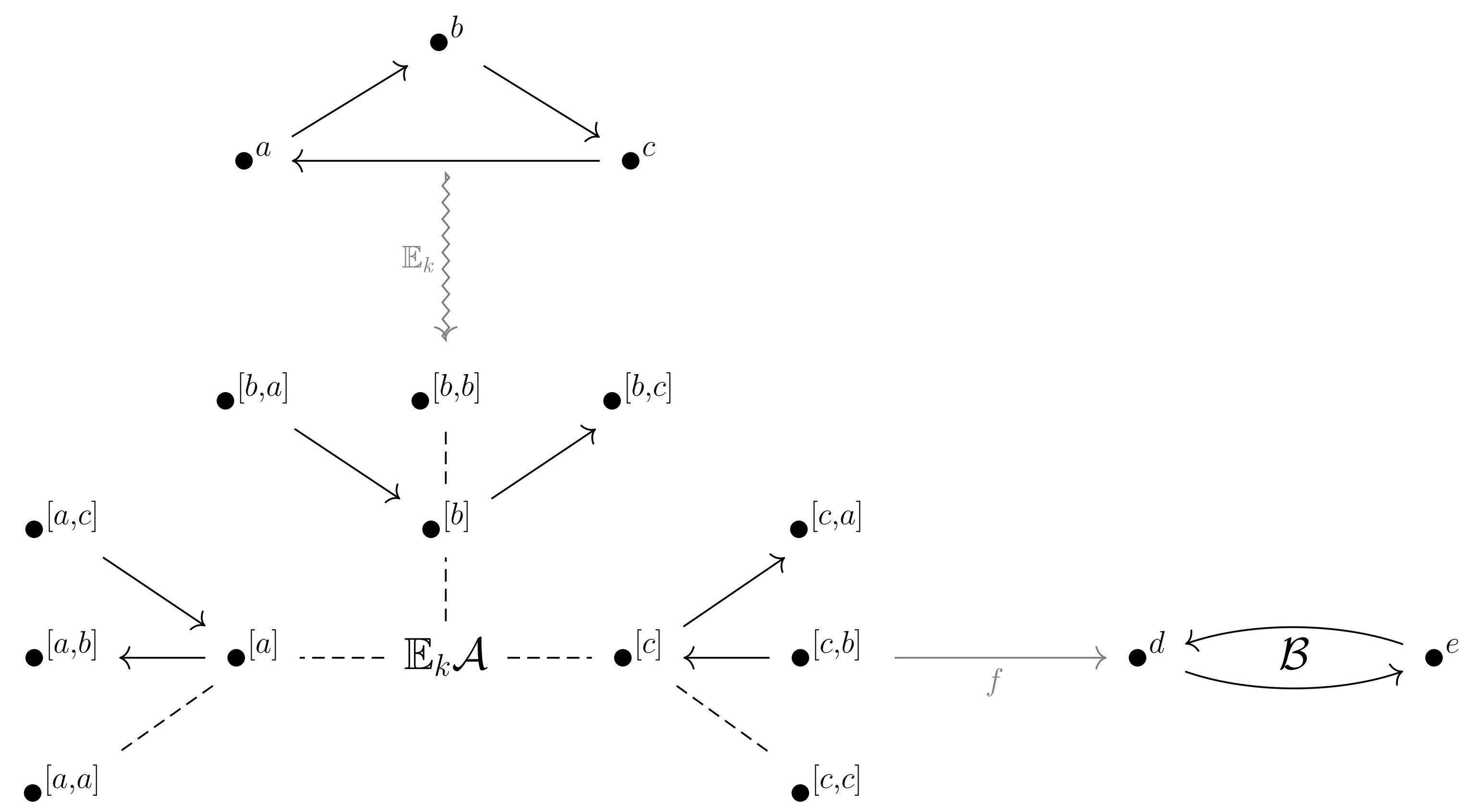
"Los límites de mi lenguaje son los límites de mi mundo" —L. Wittgenstein

Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son ***isomorfos***, son la misma estructura a menos de un reetiquetado de los puntos. A veces es útil "ponernos lentes" que limiten nuestra capacidad de distinguir estructuras, conduciendo a nociones más débiles de equivalencia. La ***Teoría de Modelos*** nos brinda un amplio abanico de lentes a través de la noción de ***indistinguibilidad lógica***: $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son indistinguibles para la lógica $\mathcal{L}$ sii satisfacen exactamente las mismas $\mathcal{L}$-fórmulas.

Comónada de Ehrenfeucht-Fraïssé

En [1], [2] se introduce un programa de investigación que reformula los juegos de comparación de estructuras en términos de ***comónadas***, construcciones categóricas generales que modifican cada objeto de una categoría dada (en nuestro caso, $\mathsf{Struct}(\sigma)$) haciendo que porten información adicional, e.g. información sobre *procesos* que ocurren en el objeto original.

La comónada EF con parámetro k, $\mathbb{E}_k$, construye a partir de $\mathcal{A}$ una estructura relacional $\mathbb{E}_k\mathcal{A}$ cuyos puntos son las secuencias de jugadas (de Spoiler) en $\mathcal{A}$. Las relaciones $R \in \sigma$ se interpretan de forma tal que *un homomorfismo $f : \mathbb{E}_k\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ "es" una estrategia ganadora para Duplicator en el juego $\mathcal{G}_k^{\rightarrow}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*. De esta forma se internaliza el juego EF como estructura presente en la categoría $\mathsf{Struct}(\sigma)$ (o más precisamente, en la ***categoría coKleisli*** de la comónada $\mathbb{E}_k$).



Es posible definir por lo menos un homomorfismo $f : \mathbb{E}_2\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, luego toda fórmula de $\mathrm{LPO}_2^{\exists}$ satisfecha por $\mathcal{A}$ es satisfecha por $\mathcal{B}$.

La ***categoría de coálgebras*** de la comónada también juega un rol importante, al caracterizar parámetros combinatorios de las estructuras relacionales, tales como ***tree-width***, ***tree-depth***, etc. El parámetro k cuantifica la ***cantidad de recursos*** disponibles para expresar propiedades de las estructuras; e.g. puede verse que el *tree-depth* de $\mathcal{A}$ coincide con el mínimo k tal que $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{E}_k$-coálgebra.

Otras familias $\mathbb{C}_k$ de comónadas indexadas por un parámetro de recursos k caracterizan otras lógicas: LPO de variables acotadas, lógica modal, lógica híbrida, *Monadic Second Order*, etc.